

Kinder-Brettspiele aus mathematischer Sicht: Modellierung und Simulation von (*Erster*) *Obstgarten* und *Eins, Vier, Viele*

ROBERT ROCKENFELLER, UNIVERSITÄT KOBLENZ-LANDAU

Zusammenfassung: Bei Brett- und Gesellschaftsspielen stellen sich oft Fragen nach Gewinnwahrscheinlichkeiten, optimalen Strategien oder der Anzahl von Möglichkeiten. Sehr ausführliche Analysen für bekannte Spiele, wie *Schach* oder *Poker*, lassen den Eindruck entstehen, dass für eine seriöse mathematische Betrachtung die Voraussetzung einer gewissen Komplexität gegeben sein müsse. Dabei kommen gerade Kinder in ihrem Alltag eher mit Spielen in Kontakt, welchen ein sehr einfaches Regelwerk zugrunde liegt. Zwei dieser Spiele sollen hier vorgestellt und mathematisch-stochastisch betrachtet werden: (*Erster*) *Obstgarten* und *Eins, Vier, Viele*. Die Gewinnwahrscheinlichkeit von (*Erster*) *Obstgarten* wird mit schulmathematischen Methoden modelliert. In einer anschließenden Monte-Carlo-Simulation wird das Ergebnis bei variierender Anzahl der Spielplättchen simuliert und per Optimierung in die Modellidee rücküberführt. Bei *Eins, Vier, Viele* wird gezeigt, dass eine einfache Abzählheuristik bereits Anhaltspunkte für eine Unfairness im Spiel liefert, welche ebenfalls mit einer Simulation aufgedeckt wird.

Keywords: Mathematische Modellierung, Simulation und Optimierung (MMSO) · Negative Binomialverteilung · Beta-Funktion · HABA[®] · Maths Eyes¹

1 Einleitung

Brett- und Gesellschaftsspiele faszinieren Menschen bereits seit Jahrtausenden. Eines der ältesten erhaltenen Brettspiele ist das *Royal game of Ur*², welches auf die Zeit von 2600 bis 2400 v.Chr. datiert wird. Wer ein Spiel gewinnt, darf sich freuen, dem Verlierer wird geraten „*Mensch, ärgere Dich nicht*“. Doch warum gewinnt der eine und verliert der andere? Laut (Bewersdorff 2012, Abb. 1) lässt sich diese Frage entweder auf Glück, Logik (bzw. Strategie) oder Bluff(en) zurückführen. Eine Mischung dieser Kriterien, sowie der unterschiedliche Grad an verfügbarer Information, macht Brettspiele auf der einen Seite sehr vielfältig und auf der anderen Seite auch interessant für Mathematiker. So existieren

kombinatorische Analysen von vielen der bekannten Brett- und Gesellschaftsspielen wie *Poker* (Chen and Ankenman 2006) oder *Schach* (Gik 1991), algebraische Überlegungen zum Aufbau von Spielen wie *Schlangen und Leitern* (Schmalz 1990) oder *Dobble* (Goertz 2018), sowie Simulationen von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für etwa *Monopoly*^{3,4} (Bewersdorff 2012). Für Spiele mit Strategien existiert eine Vielzahl von Algorithmen und Konzepten zur Optimierung, wie etwa die Minimax-Methode oder Nash-Gleichgewichte, wobei letztere sogar Anwendungen in wirtschaftswirtschaftlichen Analysen finden.

Die genannten Analysen machen das Brett- und Gesellschaftsspielen nicht weniger spannend. Auch wenn man zum Beispiel weiß, dass eine Partie *Mastermind* in höchstens fünf Zügen gewonnen werden kann (Knuth 1976), oder ein Computer selbst in den komplexesten kombinatorischen Spielen wie *Go* besser ist als der Mensch (Gibney 2016), erfreuen sich diese Spiele doch weiterhin großer Beliebtheit. Demzufolge soll der mathematische Blick, welcher hier auf Kinder-Brettspiele geworfen wird, auch den Spaß am Spiel steigern und nicht entmythifizierend wirken. Es soll vielmehr aufgezeigt werden, dass sich hinter einfachen Regeln und scheinbar festgelegten Randbedingungen komplexe mathematische Konzepte und überraschende Schlupflöcher befinden können.

Betrachtet werden hier die beiden Kleinkinderspiele (*Erster*) *Obstgarten* und *Eins, Vier, Viele*. Erstes ist ein kooperatives Glücksspiel mit einem geringen Strategieanteil, bei dem ein Blick auf die Gewinnwahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung der Strategiewahl, sowie unter Modifikation der Spielbestandteile geworfen wird. Letzteres ein reines Glücksspiel, bei dem aufgezeigt wird, dass die Wahl der Startposition bereits einen Vor- oder Nachteil bringen kann. Es werden ebenfalls Ideen zur Umsetzung im Schulkontext im Sinne eines Modellierungskreislaufs (vgl. etwa (Blum 2010, Abb. 1)) dargestellt.

¹<http://www.haveyougotmathseyes.com> (Juni 2020)

²https://research.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details.aspx?objectId=8817&partId=1 (Juni 2020)

³<http://www.bewersdorff-online.de/monopoly> (Juni 2020)

⁴<http://www.tkcs-collins.com/truman/monopoly/monopoly.shtml> (Juni 2020)

2 Vorstellung der Spiele (*Erster*) *Obstgarten und Eins, Vier, Viele*

2.1 Spielidee und -regeln von (*Erster*) *Obstgarten*

Bei dem Spieleklassiker *Obstgarten* von HABA® und der Kleinkindvariante *Erster Obstgarten* handelt es sich um ein kooperatives Brettspiel, bei dem eins bis vier Kinder (oder auch Erwachsene) gegen einen Raben namens Theo spielen. Der Rabe versucht zum *Obstgarten* zu gelangen, um die Früchte zu fressen und die Spielenden versuchen die Früchte vorher einzusammeln. Bei dem Spiel *Erster Obstgarten* besteht das Spielfeld aus vier „Bäumen“ mit jeweils vier Früchten (grüne Äpfel, blaue Pflaumen, rote Äpfel und gelbe Birnen), sowie einem Zugang zum Garten, welcher aus fünf Plättchen besteht (vergleiche Abbildung 1). Die Spielenden würfeln nun der Reihe nach mit einem sechsseitigen Würfel, auf dem die vier Farben der Früchte, sowie ein Raben- und ein Korbsymbol abgebildet sind. Würfeln die Spielenden eine der Farben dürfen sie eine entsprechende Frucht in den großen Obstkorb legen. Bei einem Rabensymbol bewegt sich der Rabe auf dem Weg um einen Schritt nach vorn. Bei einem Korbsymbol darf der oder die Würfelnde eine beliebige Frucht in den Korb legen. Das Spiel endet wenn entweder die Spielenden alle Früchte in Sicherheit gebracht (in den Korb gelegt) haben oder der Rabe die fünf Schritte bis zum Garten geschafft hat. Im ersten Fall gewinnen die Spielenden, im zweiten verlieren sie.



Abb. 1: Verpackung und aufgebauter Inhalt des HABA®-Spiels *Erster Obstgarten*.

Bei der Originalversion *Obstgarten* ist das Spielfeld ähnlich einem klassischen Brettspiel designt. Auf den vier Bäumen befinden sich nun je zehn (statt vier) Plätze für die deutlich kleineren Früchte (grüne

Äpfel, blaue Pflaumen, rote Kirschen und gelbe Birnen). Der Fortschritt des Raben wird durch neun Legeplättchen in der Mitte des Spielfeldes dokumentiert (vergleiche Abbildung 2). Anstelle eines gemeinsamen Körbchens hat nun jeder Spieler ein eigenes vor sich stehen. Die Besetzung der Würfelflächen entspricht derjenigen von *Erster Obstgarten*, jedoch hat nun das Körbchensymbol eine andere Wirkung: statt einer beliebigen können nun zwei beliebige (nicht notwendigerweise gleiche) Früchte vom Spielenden in sein Körbchen gelegt werden.



Abb. 2: Verpackung und aufgebauter Inhalt des HABA®-Spiels *Obstgarten*.

Laut Herstellerangaben soll (*Erster*) *Obstgarten* das freie Spielen, das Erkennen bzw. Benennen von Farben und Symbolen, sowie das erste Regelverständnis schulen und helfen ein „Wir“-Gefühl zu entwickeln. Jedoch wird weder auf der Homepage noch in der Spielanleitung erwähnt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Kinder gegen den Raben gewinnen (können). Vermutlich würde eine zu geringe Gewinnwahrscheinlichkeit (unter 50 %) zu Frust führen, während eine zu hohe Gewinnwahrscheinlichkeit (über 90 %) schnell Langeweile induziert. Es ist naheliegend, dass die Anzahl der Züge des Raben und die Wahl der Spielenden bei einem Körbchensymbol den Ausgang des Spiels beeinflusst. In welcher Größenordnung sich diese Wahrscheinlichkeiten bewegen, wird im nächsten Kapitel 3 erläutert.

2.2 Spielidee und -regeln von *Eins, Vier, Viele*

Das zweite hierin betrachtete Spiel namens *Eins, Vier, Viele* (ebenfalls von HABA®) ist nicht mehr im Handel erhältlich, jedoch gibt es auf Bazaren und in Onlinemärkten die Möglichkeit es gebraucht zu erwerben. Im Gegensatz zum *Obstgarten* handelt es sich um ein kompetitives Brettspiel, welches rein auf

Glück und nicht auf Taktik basiert. Die zwei bis vier Spielenden wählen eine Robbenfigur unterschiedlicher Farbe (blau, gelb, grün und weiß) und beginnen an einer der möglichen Startpositionen, d.h. an einem der schwarzen Robbensymbole auf dem Spielfeld. Der Reihe nach würfeln die Spielenden mit einem sechsseitigen Würfel, welcher die Zahlen eins bis drei jeweils zweimal zeigt und ziehen die entsprechende Anzahl an Feldern im Uhrzeigersinn weiter. Auf einem Feld angekommen sucht und zählt der Spielende sämtliche Fische in der Mitte des Spielfeldes, welche dasselbe Farbmuster aufweisen wie das Feld selbst (vergleiche Abbildung 3). Nun dürfen die entsprechende Anzahl an kleinen blauen Fischsteinen aus der Mitte entnommen und auf die eigene Zählkarte gelegt werden. Sobald alle 30 Fischsteine aus der Mitte genommen sind, ist das Spiel vorbei und der Spieler mit den meisten Fischen auf seiner Karte hat gewonnen. Unentschieden sind so auch möglich.

Nach mehrmaligem Spielen fiel mir auf, dass es anscheinend Startpositionen auf dem Spielfeld gibt, auf welchen startend man tendenziell gewinnt und solche, auf denen man tendenziell verliert. Da *Eins, Vier, Viele* ansonsten ein reines Glücksspiel ist, könnte man sich somit durch geschickte Wahl der Startposition einen Vorteil verschaffen. Aber ist diese Einschätzung auch statistisch belegbar? Die Antwort auf diese Frage wird in Kapitel 4 erläutert.



Abb. 3: Verpackung und aufgebauter Inhalt des HABA®-Spiels *Eins, Vier, Viele*.

3 Modellierung, Simulation und Optimierung von (*Erster*) Obstgarten

Zu Beginn legen wir einige Notationen fest. Seien B, G, R, Y die Mengen an blauen, gelben, roten, grünen, blauen und gelben (yellow) Früchten, sowie T die Menge der Rabenplättchen (der Name des Raben ist Theo). Ferner seien $n_B, n_G, n_R, n_Y, n_T \in \mathbb{N}$ die entsprechenden Anzahlen nach $N \in \mathbb{N}$ Zügen; das heißt zu Beginn ($N = 0$) gilt etwa $n_Y = |Y| = 4$ für die Birnen bei *Erster Obstgarten*. Das Ende einer Spielrunde Obstgarten hat also als Grundraum $\Omega = \{(n_B, n_G, n_R, n_Y, n_T)\}$ mit $n_B + n_G + n_R + n_Y = 0$ oder $n_T = 0$.

3.1 Einfache Modellierung: Binomialverteilung

In einer ersten Näherung wollen wir das Spiel *Erster Obstgarten* in ein möglichst einfaches und für Schüler gut durchschaubares mathematisches Modell aufbereiten. Dazu fassen wir sämtliche Früchte zur Menge F zusammen, für die nun zu Beginn gilt: $|F| = |B| + |G| + |R| + |Y|$. Wir nehmen weiterhin an, dass der Würfel nur zwei mögliche Symbole zeigt, nämlich ein Obst (fünf mal) und einen Raben (einmal). Somit haben wir die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, nach N Zügen genau k Treffer beim Obst erhalten zu haben, auf eine einfache Bernoullikette der Länge N reduziert. Sei X_F die Zufallsvariable, welche die Anzahl dieser Fruchttreffer zählt. Demnach ist X_F binomialverteilt mit den Parametern N und p_F für die Trefferwahrscheinlichkeit einer Frucht, sodass sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X_F = k) = \binom{N}{k} \cdot p_F^k \cdot (1 - p_F)^{N-k} \quad (1)$$

die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnen lassen. Analoges gilt für die Zufallsvariable X_T für den Raben mit Trefferwahrscheinlichkeit $p_T = 1 - p_F$.

Als einzige Zusatzidee muss nun noch beachtet werden, dass das Spiel sofort endet, falls entweder $|F|$ Früchte oder $|T|$ Raben gezogen worden sind. Der letzte, N -te Zug muss also, egal ob Frucht oder Rabe, die Entscheidung bringen. Ein Gewinn kann erst nach mindestens $N = |F|$ Zügen zustande kommen, jedoch kann es schon nach $N = |T|$ Zügen verloren sein. Nach $N = |F| + |T| - 1$ Zügen ist das Spiel in dieser vereinfachten Variante auf jeden Fall beendet. Es ergeben sich insgesamt die Gewinn- bzw. Verlustwahrscheinlichkeiten von

$$P(\text{Gewinn}) = p_F \cdot \sum_{N=|F|-1}^{|F|-1+|T|-1} P(X_F = |F| - 1) \quad (2)$$

$$P(\text{Verlust}) = p_T \cdot \sum_{N=|T|-1}^{|F|-1+|T|-1} P(X_T = |T| - 1),$$

wobei zu beachten ist, dass X_F und X_T jeweils die Länge N besitzen.

Seien nun wie in *Erster Obstgarten* die Werte $|F| = 16$, $|T| = 5$ und $p_F = 5/6$. Das Spiel ist nach Gleichung (2) gewonnen, wenn der letzte Wurf eine Frucht zeigt und vorher in den $|F| - 1 = 15$ bis $|F| + |T| - 2 = 19$ Würfeln genau 15 mal Frucht gewürfelt wurde. Es ergeben sich also Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten von

$$P(\text{Gewinn}) = \frac{5}{6} \cdot \sum_{N=15}^{19} P(X_F = 15) \approx 76,87\%$$

$$P(\text{Verlust}) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{N=4}^{19} P(X_T = 4) \approx 23,13\%,$$

welche mit handelsüblichen Taschenrechnern schnell nachzurechnen sind. Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit dient hierbei nur der Kontrolle der ansonsten impliziten Bedingung $P(\text{Gewinn}) + P(\text{Verlust}) = 1$.

Dieses erste mathematische Resultat sollte nun vor dem realen Spielhintergrund bewertet werden. Insbesondere könnte man die Schüler fragen, ob sie die errechnete Gewinnwahrscheinlichkeit von etwa 77% für zu hoch (obere Schranke) oder zu niedrig (untere Schranke) halten. Nach einem Blick auf die Veränderung der Spielregeln sollte festgestellt werden, dass sämtliche Vereinfachungen zum Vorteil der Spielenden geschehen sind. Somit überschätzt die Abschätzung vermutlich die tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit, welche wir in Kapitel 3.4 durch eine Monte-Carlo Simulation ermitteln. Zunächst wollen das Spiel jedoch einer alternativen Modellierung unterziehen und eine Betrachtung von Spielmodifikationen anstellen.

3.2 Fortgeschrittene Modellierung: Negative Binomialverteilung

Nachdem wir einen einfachen Spezialfall durchgerechnet haben, ist eine für den Unterricht passable Lösung gefunden worden. Jedoch könnte nun eingeworfen werden, dass die Indizes der Summe in Gleichung (2) etwas unübersichtlich sind und einige Voraussetzungen, bzw. Ideen erfordert. Statt nach

der Anzahl von Früchten in einer Bernoullikette mit bestimmten Voraussetzungen zu fragen, könnte man auch nach der Länge der Bernoulli-Kette fragen, bei welcher zum ersten Mal (genau) $|F|$ Früchte, bzw. $|T|$ Rabenplättchen, gezogen wurden.

Exakt diese Situation lässt sich mit der weniger bekannten *negativen Binomialverteilung* (NB) modellieren, welche Realweltanwendung in der Vorhersage von Kraftfahrzeugversicherungsfällen (David and Jemna 2015) oder der Länge von Krankenhausaufenthalten (Carter and Potts 2014) bietet. Des Weiteren stellt die NB eine Verallgemeinerung der im Unterricht eventuell behandelten geometrischen Verteilung dar. Je nach Definition über Anzahl der Erfolge oder Misserfolge finden sich unterschiedliche Definitionen in der Literatur. Wir nennen das Ziehen von Früchten einen Erfolg und das Auftreten des Rabensymbols einen Misserfolg, wobei diese Rollen vertauschbar sind. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit, dass k Misserfolge eintreten, bevor der r -te Erfolg (mit Einzeltrefferwahrscheinlichkeit p_F) eintritt, oder in Formeln:

$$X_r \sim NB(r, p_F)$$

$$\Rightarrow P(X_r = k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot p_F^r \cdot (1-p_F)^k.$$

Die Gesamtzahl der Ziehungen ist die Summe dieser beiden Anzahlen, also $N = k + r$. Die dazugehörige kummulierte Verteilungsfunktion, also die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens k Misserfolge eingetreten sind bevor der r -te Erfolg eintritt, lautet:

$$P(X_r \leq k) = \sum_{l=0}^k P(X_r = l). \quad (3)$$

Für eine kompaktere, verallgemeinerte Formulierung der Verteilungsfunktion, vergleiche Anhang A.

Zur Überprüfung: das Einsetzen der Zahlen von *Erster Obstgarten*, also $p_F = 5/6$, $k = |T| - 1 = 4$, sowie $r = |F| = 16$ ergibt dieselben Zahlenwerte wie Gleichung (2): $P(X_{16} \leq 4) \approx 77\%$.

3.3 Einflussfaktoren der Gewinnwahrscheinlichkeit

Im Alltag kommt es immer wieder vor, dass Spiele unabsichtlich „modifiziert“ werden. Auf Nachfrage werden vermutlich einige Schüler*innen zugeben, dass von geliebten Brettspielen Figuren oder sonstige Bestandteile verloren oder kaputt gegangen sind. Durch das Schaffen eines Situationsmodells von *Erster Obstgarten* kann man zum Nachdenken über den Einfluss von Spielmaterial auf den Spielausgang anregen. Wie ändert sich zum Beispiel qualitativ die

Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn eine Frucht verlorengelassen oder ein Rabenplättchen? Könnte man noch Früchte oder Rabenplättchen hinzunehmen und so die Gewinnwahrscheinlichkeit nach eigenen Wünschen modifizieren? Wie sieht es für die Situation beim Spiel *Obstgarten* aus?

Zur Beantwortung dieser Fragen kann im mathematischen Modell in Gleichung (2) (bzw. (3)) die entsprechende Anzahl der Früchte oder des Raben variiert und die dazugehörige Gewinnwahrscheinlichkeit berechnet werden. Abbildung 4 zeigt den Einfluss der Anzahl von Früchten und Rabenplättchen auf die Gewinnwahrscheinlichkeit in dieser vereinfachten Version des Spiels. Schwarze Asterisken markieren die Wahrscheinlichkeiten für eine Anzahl von Früchten zwischen 12 und 52, sowie für eine Anzahl von Rabenplättchen zwischen 0 und 15. Neben einer Einschätzung über die unmittelbare Konsequenz des Verlustes einer Frucht ($P(\text{Gewinn})$ steigt auf etwa 80 %) oder eines Rabenplättchens ($P(\text{Gewinn})$ sinkt auf etwa 61 %), kann auch das *Obstgarten* Spiel extrapoliert werden ($|F| = 40, |T| = 9$ ergibt $P(\text{Gewinn}) \approx 59\%$, Kreis-Marker). Bei diesem letzten Wert ist jedoch a priori nicht klar, ob es sich um eine obere oder eine untere Schranke handelt, da im Falle des *Obstgarten* für jedes Körbchen zwei Früchte gezogen werden können. Die Vereinfachung stellt hier also einen Nachteil für die Spieler dar. Um ein nach persönlichen Wünschen ausgewogenes Spiel zu erstellen, kann ein passendes Paar ($|F|, |T|$) auf der Grundlage der Modellgleichungen gewählt werden.

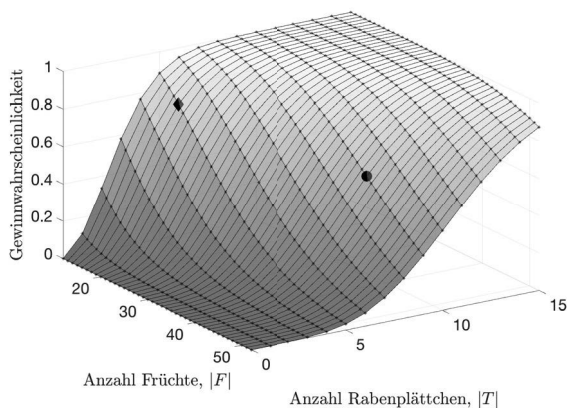


Abb. 4: Auswirkungen der Hinzu- bzw. Wegnahme von Früchten und Rabenplättchen auf die Gewinnwahrscheinlichkeit des vereinfachten mathematischen Modells von *Ersster Obstgarten* ($P(\text{Gewinn}) \approx 77\%$, Rauten-Marker). Schwarze Linien sind lineare Interpolationen.

Erwartungsgemäß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit sehr hoch für wenige Früchte und viele Rabenplättchen, sowie sehr gering für viele Früchte und wenig Rabenplättchen. Beim Betrachten von Abbildung 4 stellen wir weiterhin fest, dass es ein sehr regelmäßiges, doppelt-sigmoidales Muster zu geben scheint, welchem die Gewinnwahrscheinlichkeiten für fallendes $|F|$ und steigendes $|T|$ folgen. Diese wird durch die Symmetrie der Verteilungsfunktion erklärt (vergleiche Anhang A).

3.4 Simulation und Optimierung

Bisher haben wir lediglich einen Spezialfall von *Ersster Obstgarten* modelliert, jedoch bereits einige interessante Strukturen identifiziert. In einem nächsten Schritt soll das Spiel nun in seiner Gesamtheit simuliert werden um herauszufinden, wie weit die gefundene Gewinnwahrscheinlichkeit vom tatsächlichen Wert des Spiels abweicht. Hier besteht außerdem die Möglichkeit, eine Lerngruppe an Computerunterstützte Optimierung heranzuführen.

Zunächst heben wir die zuvor getroffenen Vereinfachungen auf, d.h.

- Es gibt nun wieder vier verschiedene Obstsorten.
- Es kann ein Körbchen gewürfelt werden, was bedeutet, dass eine beliebige Frucht im Körbchen landet.
- Welche Frucht dies ist, entscheidet der Spieler.

Die Probleme einer analytischen Lösung in diesem Fall sind naheliegend. Erstens kann es vorkommen, dass ein Baum (sagen wir der Birnbaum) komplett leergeräumt ist, aber weiterhin gelb gewürfelt wird. In diesem Fall können die Spielenden keine Frucht in Sicherheit bringen und das Spiel kann rein theoretisch unendlich lange dauern. Zweitens erscheint es zunächst logisch, sich bei einem Körbchensymbol von demjenigen Baum zu bedienen, der am vollsten ist. Jedoch zeigt die Spielpraxis mit Kindern, dass diese eher zu ihrem Lieblingsobst oder einer zufälligen Frucht greifen.

Je nachdem, wie weit eine Lerngruppe bereits mit dem Rechneinsatz und grundlegender Programmierung vertraut ist, sind zur Simulation mehrere Unterrichtsszenarien denkbar. Eine geübte Gruppe (etwa ein Informatikkurs), kann die Unterscheidung verschiedener Obstsorten recht problemlos am Rechner umsetzen, indem ein stets nicht-negativer Coun-

ter für jede Obstsorte angelegt wird. Auch das Vorhandensein oder das Fehlen von Strategie können separat mit if-else-Bedingungen simuliert werden. Algorithmus C in Anhang C zeigt den Pseudocode einer möglichen Implementierung einer Monte-Carlo-Simulation in MatLab (oder der kostenfreien Version FreeMat). Es sind sowohl die Spielvarianten (*Erster Obstgarten*, *Obstgarten*), die Anzahl der Rabenplättchen ($|T|$), als auch die Strategie (mit, ohne) wählbar.

Eine weniger geübte Gruppe könnte versuchen zunächst die vereinfachten Modelle aus den vorangegangenen Kapiteln zu simulieren. Dies ist bereits mit einem Tabellenkalkulationsprogramm möglich. Hierzu können mit Hilfe des Zufallszahlengenerators Würfe von eins bis sechs erzeugt werden, wobei die eins beispielsweise für den Raben steht und die übrigen Zahlen für das Obst. Ausgehend von 16 Früchten und 5 Rabenkarten kann nun in jeder Zeile durch eine Wenn-Abfrage der eine oder andere Zähler um eins verringert werden. Sobald eine Zahl kleinergleich Null erscheint ist der Durchlauf beendet. Die gefundenen Wahrscheinlichkeiten aus den Gleichungen (2), bzw. (3), können so bestätigt werden.

Abbildung 5 zeigt die Ergebnisse einer Simulation mit jeweils $S = 100.000$ Spieldurchläufen eines vollständigen (*Erster*) *Obstgarten* Spiels, bei einer variablen Anzahl von Rabenplättchen und im Vergleich zu den vereinfachten Modellergebnissen. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für *Erster Obstgarten* beträgt dabei 63,21% mit Strategie und ohne lediglich 59,66%. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für *Obstgarten* liegt bei 68,31% mit Strategie und bei 67,48% ohne. Zum Vergleich: das vereinfachte Modell des reinen Glücksspiels lieferte Gewinnwahrscheinlichkeiten von 77%, bzw. 59%. Es erscheint seltsam, dass für die Version des Spieles für ältere Kinder eine höhere Gewinnchance besteht, da diese ja bereits mehr Frustrationstoleranz aufweisen als jüngere Spielende.

Wir beobachten eine ähnliche Verteilungsfunktion wie zuvor in Gleichung (3), jedoch mit unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit p für das Obst. An dieser Stelle ist es möglich, Lerngruppen an Computergestützte Optimierung heranzuführen. So ist es zum Beispiel möglich in einer dynamischen Geometrie Software wie GeoGebra die Simulationsergebnisse einzulesen und mit Hilfe eines Schiebereglers den Parameter p so zu variieren, dass der Funktionsgraph optisch gut zu den Daten passt. In einer et-

was fortgeschritteneren Lerngruppe könnte man auch versuchen, den Abstandsbegriff von Funktion und Daten zu motivieren und die (absoluten oder quadratischen) Abstände berechnen und anzeigen lassen. Ein Informatik-affiner Kurs könnte sich auch in der bevorzugten Programmiersprache an ein algorithmisches Vorgehen, etwa über ein Gradientenbasiertes Gauß-Newton-Verfahren heranwagen, welches in vielen Sprachbibliotheken bereits verfügbar ist. Im Falle eines einzigen zu optimierenden Parameters kann auch das im Schulkontext behandelte Newton-Verfahren auf die Ableitung der Abstandsfunktion angewendet werden.

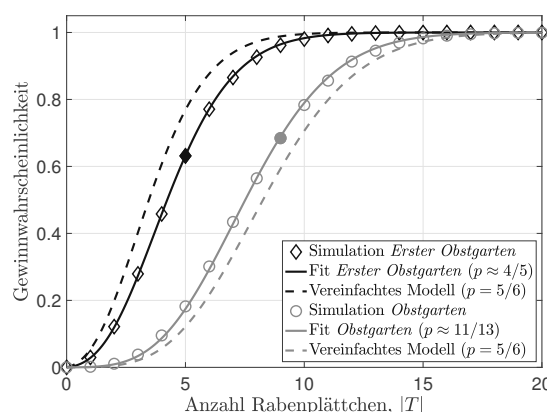


Abb. 5: Simulation der Gewinnwahrscheinlichkeiten von *Erster Obstgarten* (schwarze Rauten $|F| = 16$,) und *Obstgarten* ($|F| = 40$, schwarze Kreise), volle Symbole markieren die tatsächlichen Spielumgebungen der Originalspiele. Approximation durch die Verteilungsfunktion (Gleichung (3)) mit $p^* \approx 4/5$ (schwarz) und $p^* \approx 11/13$ (grau) sind mit durchgezogenen Linien markiert. Ebenso eingezeichnet sind die Abschätzungen durch das vereinfachte analytische Modell aus Kapitel 3.1 (gestrichelte Linien).

Als optimalen Parameter für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p erhält man bei *Erster Obstgarten* den Wert $p^* \approx 4/5$ und bei *Obstgarten* den Wert $p^* \approx 11/13$ (vgl. ebenso Abbildung 5). Man könnte beide Spiele also auch mit der vereinfachten Variante aus Kapitel 3.1 approximieren, wobei man für *Erster Obstgarten* einen zehneckigen Würfel mit zwei Rabensymbolen und acht Fruchtsymbolen nutzt und für *Obstgarten* einen 13-seitigen Würfel⁵ mit ebenfalls zwei Rabensymbolen jedoch elf Fruchtsymbolen.

⁵<https://www.thediceshoponline.com/sides/26/d13> (Juni 2020)

len. Man sieht allerdings, dass für den *Obstgarten* die Gewinnwahrscheinlichkeit für geringe Rabenplättchenanzahlen ($\approx 3...6$) durch den Fit tendenziell unterschätzt und für hohe Anzahlen ($\approx 11...14$) überschätzt wird. Grund für diese Abweichungen ist die zweite Frucht, welche beim Körbchensymbol gezogen werden kann und so für eine Verzerrung sorgt.

4 Spielsimulation zum Aufdecken von Unfairness: *Eins, Vier, Viele*

In diesem letzten Kapitel soll eine weitere Anwendung von Monte-Carlo-Simulationen auf Kinder-Brettspiele aufgezeigt werden. Es soll die Frage beantwortet werden, ob Spielende bei *Eins, Vier, Viele* bereits einen Vorteil oder Nachteil durch Wahl der Startpositionen haben. Die Modellierung des Spiels selbst als Markov-Kette sei an dieser Stelle als nicht zielführend erwähnt, da der Spielprozess bereits nach 8-20 Zügen endet und somit für eine nötige Grenzwertbetrachtung viel zu kurz ist. Abbildung 6 zeigt eine Darstellung des Spielfeldes ohne die dazugehörigen Farbmuster, lediglich die Anzahl der auf den Feldern ziehbaren Fische ist aufgezeigt. Zur Unterscheidung der Startpositionen sind diese mit verschiedenfarbigen Robben (gelb, grün, blau, weiß) gekennzeichnet. Die Zugrichtung der jeweiligen Positionen ist mit Pfeilen gekennzeichnet. In der Mitte befinden sich 30 zu fangende Fische. Der Würfel zeigt nur die Zahlen eins bis drei, jeweils zweimal.

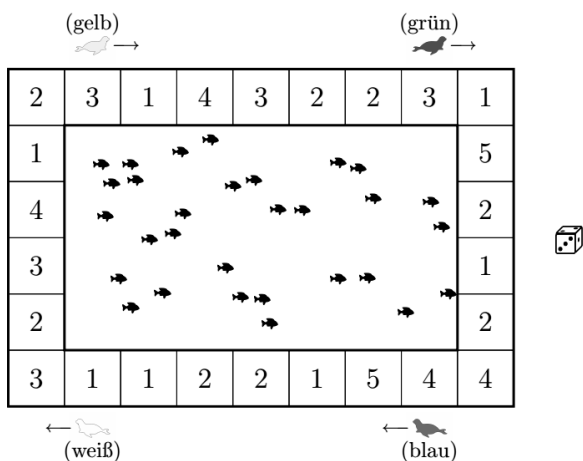


Abb. 6: Spielfeldaufbau von *Eins, Vier, Viele*, falls die farbigen Randfelder den Anzahlen der Fische mit gleicher Färbung entsprechen würden.

Auf den ersten Blick fällt auf, dass vor und auf der Startposition der blauen Robbe insgesamt acht Fi-

sche zu holen wären, auf die blau jedoch erst am Ende einer vollen Runde zugreifen könnte. Eine weitere Analyse der Zahlenverteilungen ergibt, dass alle Spieler auf den ersten drei erreichbaren Feldern genau acht Fische zur potentiellen Verfügung haben, also auch denselben Erwartungswert für den ersten Wurf. Dasselbe gilt für die Startpositionen gelb, grün und weiß für die ersten sechs Felder (je 15 Fische), sowie zwölf Felder (je 30 Fische). Für Startposition blau sind es jedoch für dieselbe Anzahl Felder nur zwölf, bzw. 27 Fische. Zwischen Feld sechs und Feld zwölf hat Startposition grün die höchste kumulierte Summe, zwischen Feld 13 und 18 Startposition gelb und zwischen Feld 19 und 26 Startposition weiß. Startposition blau ist hierbei bis auf eine Ausnahme (21 Felder) das Schlusslicht. Nach 26 Feldern ist eine Runde vorüber und alle Startpositionen haben eine kumulierte Summe von 64 Fischen. Dies entspricht einem mittleren Wert von etwa 2,5 Fischen pro Feld und somit einer erwarteten Spieldauer von zwölf Spielzügen, also drei für jeden Spieler. An dieser Stelle können weitere Heuristiken von der Lerngruppe entworfen und getestet werden. Etwa, wie geht das Spiel aus, wenn alle Spielenden nur immer genau ein, zwei oder drei Felder weit gehen dürfen? Oder: wie schnell ist das Spiel im besten Fall (jeder landet auf einem Feld mit maximal vielen Fischen), bzw. schlechtesten Fall (jeder landet immer auf einem Feld mit minimal wenigen Fischen) zu Ende?

Aufgrund dieser enumerativen Betrachtung könnte man sich einen Vorteil vorstellen, wenn auf Startposition grün gestartet wird. Um dies auch empirisch zu überprüfen, wird durch den Algorithmus B in Anhang B die Simulation von 100.000 Spielen durchgeführt. Hierbei wurde darauf geachtet, dass nicht immer dieselbe Startposition das Spiel beginnt, sondern der Reihe nach durchgewechselt wird. Ähnlich wie bei (*Erster*) *Obstgarten* könnte die Simulation auch in einer Tabellenkalkulationsumgebung erstellt werden.

Das Ergebnis über die Verteilung der Fische zum Ende des Spiels über die Startpositionen (Abbildung 7) bestätigt unsere Überlegungen: der Mittelwert für die Anzahl der Fische liegt bei Startposition gelb bei etwa 7,8, für grün bei 8,2, für blau bei lediglich 6,2 und bei weiß bei 7,7. Auch der Median für blau ist mit sechs gleich zwei niedriger als für alle anderen Startpositionen. Der Mittelwert und der Median für die Anzahl der Spielzüge betragen 12,6 bzw. 13, was bedeutet, dass der Startspieler tendenziell einen vierte Extrazug machen kann. Von den 100.000 Spie-

len gewinnt gelb in etwa 33.000 Fällen, grün in etwa 43.500, blau in nur etwa 14.000 und weiß in 34.000 Fällen. Hierbei gewann in etwa 80.000 Fällen ein Spielender alleine das Spiel, in etwa 16.000 gewannen zwei und in etwa 4.000 Fällen gewannen drei Spielende gemeinsam. Dass alle vier Spielende gleichzeitig gewinnen ist aufgrund der Anzahl der Fische unmöglich.

Abbildung 7 eignet sich darüber hinaus ebenfalls, um auf die Interpretation von Boxplots einzugehen. Denn obwohl zum Beispiel die Spieler gelb, grün und weiß denselben Median an Fischen haben, sind die Form der Boxen und die Lage der Mittelwerte jeweils unterschiedlich. Insbesondere sind die Konfidenzintervalle auch nicht symmetrisch um den Mittelwert.

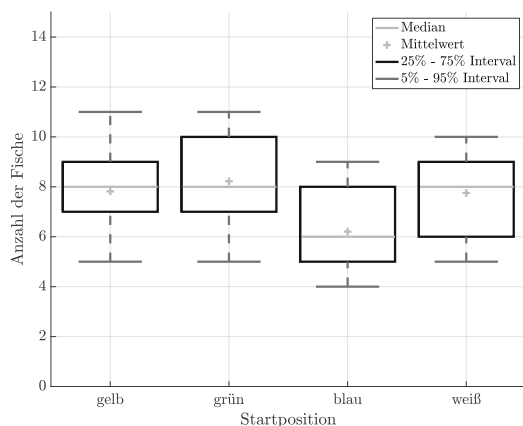


Abb. 7: Boxplots über die Anzahl der Fische zum Ende einer Partie *Eins, Vier, Viele* nach 100.000 Durchläufen für jede Startposition (gelb, grün, blau, weiß). Mediane (hellgraue Linien) und Mittelwerte (hellgraue Plus-Symbole) sind ebenso wie doppelseitige 50% (schwarze Kästen) und 90% Konfidenzintervalle (dunkelgraue Balken) gegeben. Genaue Zahlen finden sich im Text.

5 Zusammenfassung

Mit dieser Arbeit sollte gezeigt werden, dass die mathematische Modellierung, Simulation und Optimierung in der Analyse von Kinder-Brettspielen einige spannende Ergebnisse zu Tage fördern kann. Der Blick auf die Welt durch Mathe-Augen muss nicht immer aus realitätsfernen oder konstruierten Aufgaben bestehen; die Anwendung der Theorie begegnet uns im Alltag in den unerwartetsten Situationen wie

etwa beim Spielen. Ich möchte dazu anregen, sich auch bei anderen Brettspielen als den hierin betrachteten (*Erster Obstgarten* und *Eins, Vier, Viele*) damit auseinander zu setzen, ob man Gewinnwahrscheinlichkeiten durch Hinzu- oder Wegnahme von Spielmaterial manipulieren oder sich durch Wahl einer geschickten Startposition einen systematischen Gewinnvorteil verschaffen kann. In jedem Fall sollte sich der Spielspaß dadurch erhöhen lassen.

Danksagung

Dank gilt meinen Kindern für die Inspiration zu dieser Arbeit.

Literatur

- Bewersdorff, J. (2012). Glück, Logik und Bluff. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- Chen, B., und Ankenman, J. (2006). The Mathematics of Poker. ConJelCo LLC, Pittsburgh.
- Gik, E. J. (1991). Schach und Mathematik. Thum Verlag, Frankfurt am Main.
- Schmalz, B. (1990). Verwendung von Untergruppenleitern zur Bestimmung von Doppelnebenklassen. *Bayreuther Mathematische Schriften*, 31(1), 125–170.
- Goertz, R. (2018). Kartenspiel-Algebra. *Spektrum der Wissenschaft*, 6, 72–77.
- Knuth, D. E. (1976). The computer as master mind. *Journal of Recreational Mathematics*, 9(1), 6 Seiten.
- Gibney, E. (2016). Google AI algorithm masters ancient game of Go. *Nature*, 529(1), 445–446.
- Blum, W. (2010). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(34), 42–48.
- David, M. und Jemna, D.-V. (2015). Modeling the frequency of auto insurance claims by means of poisson and negative binomial models. *Scientific Annals of the “Alexandru Ioan Cuza” University of Iasi*, 62(2), 151–168.
- Carter, E. M., und Potts, H. W. W. (2014). Predicting length of stay from an electronic patient record system: a primary total knee replacement example. *BMC Medical Informatics and Decision Making*, 14(265), 13 Seiten.
- Patil, G. P. (1960). On the evaluation of the negative binomial distribution with examples. *Technometrics*, 2(4), 501–505.

Anschrift des Verfassers
 Dr. Robert Rockenfeller
 Mathematisches Institut
 Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz
 Universitätsstr. 1
 56070 Koblenz
 rrockenfeller@uni-koblenz.de

Anhang

A Negative Binomialverteilung und die Beta-Funktion

Die Verteilungsfunktion in Gleichung (3) kann auch kompakter formuliert werden durch

$$P(X_r \leq k) = I_{pF}(r, k+1), \quad (4)$$

wobei $I_{pF}(r, k+1)$ die *regularisierte, unvollständige Beta-Funktion* bezeichnet.

Die einfache Beta-Funktion ist für $x, y \in \mathbb{R}$ definiert als

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (5)$$

und somit verwandt mit der häufiger in der Stochastik anzutreffenden *Gamma-Funktion* $\Gamma(x)$, einer Verallgemeinerung des Begriffes der Fakultät. Die Beziehung in Gleichung (5) wird etwa verwendet, um das Volumen einer höher-dimensionalen Kugel zu berechnen.

Die unvollständige Beta-Funktion $B_p(x, y)$ stellt eine Verallgemeinerung der Beta-Funktion dar und ist für $0 \leq p \leq 1$ definiert als

$$B_p(x, y) := \int_0^p t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (6)$$

Falls $B_p(x, y)$ auf den Wert von $B(x, y)$ normiert wird spricht man von der *regularisierten unvollständigen Beta-Funktion* $I_p(x, y) = B_p(x, y)/B(x, y)$, welche auch als Verteilungsfunktion der (negativen) Binomialverteilung Verwendung findet:

$$I_p(r, k+1) = \sum_{i=0}^k \binom{i+r-1}{i} \cdot p^r \cdot (1-p)^i. \quad (7)$$

Diese letzte Gleichung zu beweisen (über die Ableitung nach p) ist eine schöne Übungsaufgabe für die ambitionierte Analysis-Zuhörerschaft, vgl. (Patil 1960).

Die Gewinnwahrscheinlichkeiten aus Abbildung 4 bzw. Gleichung (2) können nun sehr kompakt geschrieben (und interpoliert) werden, indem die Anzahl der Erfolge $r = |F|$ und die Anzahl der Misserfolge mit höchstens $k = |T| - 1$ substituiert wird. Es folgt

$$P(\text{Gewinn}) = I_{pF}(|F|, |T|),$$

und wegen der Symmetrie der Beta-Funktion aus Gleichung 5 ist auch der doppelt-sigmoidale Charakter in Abbildung 4 erklärt.

B Algorithmus zur Simulation von *Eins, Vier, Viele*

Eingabe: Anzahl Fische $F = 30$, Anzahl der Spieldurchläufe $S = 100.000$,

Fische auf Positionen $\mathcal{F} = (2, 3, 1, 4, 3, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 1, 2, 4, 4, 5, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 2, 3, 4, 1)$,

Startpositionen der Spieler: $Pos^{(0)} = (2, 8, 15, 21)$.

Ausgabe:: Anzahl der Fische Z pro Spieler bei Spielende

for $i = 1 \dots S$ **do**

$Z = (0, 0, 0, 0)$

$F = 30$

$Pos = Pos^{(0)}$

while $F > 0$ **do**

for $j = \text{mod}(i : i + 3, 4) + 1$ % Startspieler wechselt nach jedem Spiel **do**

$W = \text{random}\{1, 2, 3\}$

$Pos(j) = \text{mod}(Pos(j) + W, 26)$ % Zu neuer Position ziehen

$Z(j) = Z(j) + \mathcal{F}(Pos(j))$ % Fische nehmen

$F = F - \mathcal{F}(Pos(j))$

if $F \leq 0$ **then**

$Z(j) = Z(j) + F$

BREAK

end if

end for

end while

end do

C Algorithmus zur Simulation von (Erster) Obstgarten

Eingabe: Spiel $\in \{\text{Erster Obstgarten}, \text{Obstgarten}\}$, $n_T^{(0)} \in \{0, \dots, 20\} =: n_T$,
Strategie $\in \{\text{mit}, \text{ohne}\}$, Anzahl der Spiele $S = 100.000$

Ausgabe: Gewinnwahrscheinlichkeit $p(\text{Spiel}, n_T^{(0)}, \text{Strategie})$

```

for  $n_T^{(0)} \in n_T$  do
   $G = 0$   % Anzahl Gewinne
  for  $i = 1 \dots S$  do
     $T = n_T^{(0)}$   % Counter Theo
    if Spiel = Erster Obstgarten then
       $C = (4, 4, 4, 4)$ 
    else
       $C = (10, 10, 10, 10)$ 
    end if
    while  $T > 0$  &  $\sum_{j=1}^4 |C(j)| > 0$  do
       $W = \text{W\u00fcrfelwurf}$ 
      if  $W = \text{Farbe}$  then
         $C(W) = \max\{0, C(W) - 1\}$ 
      else if  $W = \text{Rabe}$  then
         $T = T - 1$ 
      else if  $W = \text{Korb}$  then
        if Strategie = mit then
          Finde Baum  $B_1$  mit maximaler Anzahl an Fr\u00fcchten
           $C(B_1) = C(B_1) - 1$ 
          if Spiel = Obstgarten &  $\sum_{j=1}^4 |C(j)| > 0$  then
            Wiederhole den Schritt ein zweites Mal
          end if
        else if Strategie = ohne then
          W\u00e4hle Baum  $B_2$  mit positiver Anzahl an Fr\u00fcchten zuf\u00e4llig
           $C(B_2) = C(B_2) - 1$ 
          if Spiel = Obstgarten &  $\sum_{j=1}^4 |C(j)| > 0$  then
            Wiederhole den Schritt ein zweites Mal
          end if
        end if
      end if
    end while
    if  $T \neq 0$  then
       $G = G + 1$ 
    end if
  end for
   $p(\text{Spiel}, n_T^{(0)}, \text{Strategie}) = G/S$ 
end for

```